



Università degli Studi di Messina
Dottorato di Ricerca in Matematica e Informatica
Metodi variazionali per le equazioni alle derivate parziali
(Prof. Filippo D. Cammaroto)
(30 ore)

1. Funzionali Gâteaux e Fréchet differenziabili su spazi di Banach

Introduzione ai metodi variazionali. Funzionali Gâteaux-differenziabili definiti su spazi di Banach. Derivata di Gâteaux e proprietà fondamentali. Funzionali Fréchet-differenziabili definiti su spazi di Banach. Derivata di Fréchet e proprietà fondamentali. Confronto tra le due nozioni di differenziabilità. Regola della catena per funzionali differenziabili. Teorema della media per funzionali Fréchet differenziabili. Regola del prodotto per funzionali differenziabili. Derivate di Gâteaux e di Fréchet del secondo ordine. Condizioni necessarie di minimo e risultati di esistenza.

2. Spazi di Sobolev

Lo spazio di Sobolev $W^{1,p}([a,b])$. Completezza, riflessività e separabilità degli spazi di Sobolev. Spazio delle funzioni α -Hölderiane. Lo spazio $W_0^{1,p}([a,b])$. Disuguaglianza di Poincaré. Teoremi di immersione degli spazi di Sobolev. Gli spazi di Sobolev $W^{1,p}(\Omega)$ e $W_0^{1,p}(\Omega)$: completezza, riflessività, separabilità e immersioni. Differenziabilità della norma. Gli spazi di Sobolev $W^{1,p(x)}(\Omega)$ e $W_0^{1,p(x)}(\Omega)$. Modulare dello spazio e sue proprietà.

3. Metodi variazionali: un primo esempio

Studio di un problema ordinario ai limiti del secondo ordine. Funzionali associati al problema. Minimizzazione di funzionali coercivi. Teorema di esistenza di soluzioni del problema.

4. Un principio variazionale generale e applicazioni

Problemi di minimizzazione dipendenti da un parametro. Funzionali della forma $\Phi + \lambda\Psi$. Un principio variazionale generale di Ricceri. Condizioni di esistenza di punti critici e risultati di molteplicità. Alcune applicazioni a problemi ellittici non lineari. Esistenza di infinite soluzioni per un problema ai limiti a due punti con condizioni di Dirichlet omogenee. Esistenza di infinite soluzioni per un problema di Dirichlet coinvolgente il p -laplaciano.

5. Metodi variazionali per un problema di tipo Kirchhoff

Un teorema di Ricceri di esistenza di tre punti critici per funzionali del tipo $\Phi - \lambda\Psi - \mu\Gamma$. Proprietà dell'operatore $p(x)$ -laplaciano. Due risultati di esistenza di tre soluzioni per un problema di tipo Kirchhoff coinvolgente il $p(x)$ -laplaciano.

6. Metodi variazionali per un problema coinvolgente il laplaciano frazionario

Spazi di Sobolev frazionari $W^{s,p}$. Definizione secondo Gagliardo e principali proprietà. Teoremi di immersione. Il caso $p=2$ e il legame con il laplaciano frazionario. Definizione di $W^{s,2}$ mediante trasformata di Fourier ed equivalenza con la definizione secondo Gagliardo. L'operatore laplaciano frazionario. Equivalenza tra varie definizioni di laplaciano frazionario. Studio di un problema con laplaciano frazionario mediante metodi variazionali: approccio mediante minimizzazione diretta e mediante teorema di passo di montagna

Bibliografia

- **H. Brezis**, *Functional Analysis, Sobolev Spaces and Partial Differential Equations*, Springer
- **Z. Denkowski, S. Migórski, N.S. Papageorgiou**, *An Introduction to Nonlinear Analysis*, Springer, New York, 2003
- **B. Ricceri**, *A general variational principle and some of its applications*, Journal of Computational and Applied Mathematics 113, (2000), 401–410
- **B. Ricceri**, *A further three critical points theorem*, Nonlinear Analysis 71(9), (2009), 4151–4157.
- **F. Cammaroto, A. Chinnì**, *Infinitely many solutions for a two points boundary value problem*, Far East Journal of Mathematical Sciences, 11 (1), 41-51, 2003.
- **F. Cammaroto, A. Chinnì, B. Di Bella**, *Infinitely many solutions for the Dirichlet problem involving the p -Laplacian*, Nonlinear Analysis, 61, 41-49, 2005.
- **F. Cammaroto, L. Vilasi**, *Multiple solutions for a Kirchhoff-type problem involving the $p(x)$ -Laplacian operator*, Nonlinear Analysis, 74, (2011), 1841-1852.
- **F. Cammaroto, L. Vilasi**, *Weak solutions for a fractional equation in R^n with Kirchhoff terms*, Complex Variables and Elliptic Equations, 61 (10), (2016), 1362-1374.