



Università degli Studi di Messina - Corso di laurea Magistrale in Matematica  
Programma di **Istituzioni di Analisi per le Applicazioni - Mod. A**  
(Prof. Filippo D. Cammaroto)  
A.A. 2025/2026

**1. Integrazione in uno spazio di misura (9 ore)**

Funzioni elementari. Approssimazione delle funzioni numeriche misurabili e a valori non negativi mediante funzioni elementari. L'integrale delle funzioni elementari. Proprietà dell'integrale delle funzioni elementari. Proprietà verificate quasi-ovunque. L'integrale delle funzioni misurabili e non negative definite ovunque o quasi ovunque. Proprietà dell'integrale. Il teorema di Beppo Levi. Teorema di integrazione per serie. Proprietà distributiva dell'integrale rispetto alla misura. Misure su  $P(M)$  ( $M$  insieme numerabile). Funzioni  $\mu$ -quasi-integrabili e loro integrale. Funzioni  $\mu$ -integrabili. Condizioni di  $\mu$ -integrabilità. Proprietà dell'integrale. Esempi di integrazione. L'integrale esteso ad un sottoinsieme di  $\Omega$ . Misure con segno munite di densità rispetto ad una misura  $\mu$ . Proprietà di  $f_\mu$ . Trasformazione di integrali da uno spazio di misura ad un altro.

**2. Integrazione rispetto ad una misura prodotto (8 ore)**

Prodotto di  $\sigma$ -algebre. Generatori della  $\sigma$ -algebra prodotto. Prodotto di misure  $\sigma$ -finite. Teorema di Tonelli. Teorema di Fubini. I teoremi di Tonelli e di Fubini per la misura di Lebesgue  $m_{p+q}$ .

**3. Gli spazi  $L^p(\mu)$  - I parte (4 ore)**

Funzioni numeriche  $\mu$ -integrabili con l'esponente  $p$ . Disuguaglianze di Hölder e di Minkowski. Disuguaglianze di Clarkson. Gli spazi  $L^p(\mu)$  ( $0 < p < +\infty$ ). Lo spazio  $L^\infty(\mu)$ . Completezza di  $L^\infty(\mu)$ .

**4. Vari modi di convergenza delle successioni di funzioni reali misurabili (8 ore)**

Il lemma di Fatou ed alcune sue conseguenze. Convergenza quasi-ovunque. Convergenza in media di ordine  $p$ . Il teorema della convergenza dominata. Completezza di  $L^p(\mu)$  ( $0 < p < +\infty$ ). Relazioni tra convergenza in media e convergenza quasi-ovunque. La convergenza quasi-uniforme. Condizione caratteristica per la convergenza quasi-uniforme. Il teorema di Severini-Egorov. La convergenza in misura. Il criterio di Weyl-Riesz per la convergenza in misura. Riepilogo delle relazioni che intercedono fra i vari tipi di convergenza.

**5. Gli spazi  $L^p(\mu)$  - II parte (9 ore)**

Inclusioni tra spazi  $L^p$ . Condizione caratteristica per la validità dell'inclusione  $L^p(\mu) \subseteq L^q(\mu)$ . Duale topologico degli spazi  $L^p$  per  $1 \leq p \leq +\infty$ . Riflessività degli spazi  $L^p$  per  $1 \leq p \leq +\infty$ . Alcuni teoremi di densità negli spazi  $L^p$ . Separabilità degli spazi  $L^p$  per  $1 \leq p \leq +\infty$ .

**6. Misure con densità (6 ore)**

Misure con segno munite di densità rispetto ad una misura  $\mu$ . Integrazione rispetto ad una misura con densità. Misure con segno assolutamente continue rispetto ad una misura  $\mu$ . Assoluta continuità nel senso di Vitali e nel senso di Caccioppoli. Confronto tra i vari tipi di assoluta continuità. Il teorema di Radon-Nykodym. Unicità della densità.

**7. Caratterizzazione della convergenza in media: il teorema di Vitali (4 ore)**

Equi-assoluta continuità secondo Vitali e secondo Caccioppoli. Il Teorema di Vitali; varianti e conseguenze. Caratterizzazione della convergenza in media mediante la convergenza delle norme.