



Università degli Studi di Messina - Corso di laurea Triennale in Matematica
Programma di **Analisi Matematica III**
(Prof. Filippo D. Cammaroto)
A.A. 2025/2026

1. Successioni di insiemi (2 ore)

Massimo e minimo limite di una successione di insiemi. Successioni convergenti. Successioni monotone. Distanza di due insiemi di uno spazio metrico. Insiemi con distanza nulla. Continuità della funzione distanza da un insieme fissato. Successioni di insiemi di uno spazio topologico invadenti il proprio limite. Intervalli e Plurintervalli di $\mathbb{R}^h$. Ogni aperto di $\mathbb{R}^h$ è invaso da una successione di plurintervalli.

2. La misura di Lebesgue (6 ore)

Proprietà della famiglia dei plurintervalli di $\mathbb{R}^h$. La misura elementare dei plurintervalli. Proprietà della misura elementare. La misura di Lebesgue degli insiemi aperti limitati di $\mathbb{R}^h$. Proprietà della misura di Lebesgue degli insiemi aperti limitati. La misura di Lebesgue degli insiemi chiusi limitati di $\mathbb{R}^h$. Proprietà della misura di Lebesgue degli insiemi chiusi limitati. Insiemi limitati di $\mathbb{R}^h$ misurabili secondo Lebesgue. Proprietà della famiglia degli insiemi limitati di $\mathbb{R}^h$ misurabili secondo Lebesgue. Operazioni e ordinamento in $\mathbb{R}$ esteso. Insiemi di $\mathbb{R}^h$ misurabili secondo Lebesgue. Proprietà della famiglia degli insiemi di $\mathbb{R}^h$ misurabili secondo Lebesgue. Proprietà della misura di Lebesgue per gli insiemi misurabili.

3. La teoria astratta della misura (8 ore)

σ -algebre. Proprietà delle σ -algebre. Traccia di una σ -algebra. Generatori di una σ -algebra. Sistemi di Dynkin e loro generatori. Misure. Proprietà delle misure. Teorema di coincidenza di due misure. Misure σ -finite. Spazi misurabili. Spazi di misura. Spazi di misura completi. Completamento di uno spazio di misura. Misure con segno e loro proprietà. Variazioni superiore, inferiore e totale di una misura con segno. Il teorema della partizione di Hahn. Il teorema di decomposizione di Jordan. Misure mutuamente singolari. Ulteriori proprietà delle misure con segno.

4. Boreliani di uno spazio topologico (3 ore)

Richiami di topologia: topologia, basi, topologia generata, intorno, topologia relativa. Boreliani di uno spazio topologico. Boreliani di un sottospazio. Generatori della σ -algebra B_h dei boreliani di $\mathbb{R}^h$. $B_h \subseteq L_h$. $(\mathbb{R}^h, L_h, m_h)$ è il completamento di $(\mathbb{R}^h, B_h, \lambda_h)$. Metrica e boreliani di $\mathbb{R}$ esteso. Misure di Borel.

5. Funzioni misurabili (6 ore)

Funzioni misurabili. Condizione necessaria e sufficiente di misurabilità. σ -algebra generata da una famiglia di funzioni. Misurabilità delle funzioni composte. Immagine di una misura mediante una funzione misurabile. Restrizioni e prolungamenti di funzioni misurabili. Invarianza per traslazioni della misura di Lebesgue. Funzioni numeriche misurabili. Condizioni caratteristiche per la misurabilità di una funzione numerica. Operazioni con le funzioni numeriche misurabili. Funzioni elementari. Approssimazione delle funzioni numeriche misurabili e a valori non negativi mediante funzioni elementari.

6. Insiemi non misurabili secondo Lebesgue (5 ore)

Ogni insieme di L_h di misura positiva contiene un insieme non misurabile secondo Lebesgue (esempio di Vitali). La misura identicamente nulla è l'unica misura su $P(\mathbb{R}^h)$ invariante per traslazioni e finita sugli insiemi limitati. L'insieme di Cantor. La funzione singolare di Lebesgue. Esistenza di insiemi misurabili secondo Lebesgue che non sono boreliani.

7. Spazi normati ed elementi di topologia (6 ore)

Richiami di topologia: spazi topologici compatti, spazi topologici sequenzialmente compatti, spazi separabili, spazi metrici, equivalenza della compattezza e della sequenziale compattezza negli spazi metrici, spazi metrici completi, spazi metrici totalmente limitati, caratterizzazione degli spazi metrici compatti. Spazi normati. Spazi di Banach. Operatori lineari. Isomorfismi lineari. Funzionali lineari. Duale algebrico di uno spazio normato. Continuità degli operatori e dei funzionali lineari. Lo spazio degli operatori lineari e continui tra due spazi normati. Duale topologico di uno spazio normato. Norma operatoriale. Lemma di Riesz. Caratterizzazione di Riesz della finite-dimensionalità di uno spazio normato.

8. Topologia debole (6 ore)

La topologia debole di uno spazio normato. Mappa canonica e sue proprietà. La topologia debole star nel duale topologico di uno spazio normato. Confronto tra la topologia forte, la topologia debole e la topologia debole star nel duale topologico di uno spazio normato. Confronto tra i vari tipi di continuità di funzioni definite tra due spazi normati. Spazi di Banach riflessivi. Le caratterizzazioni di Kakutani e di James degli spazi di Banach riflessivi. Alcune interessanti proprietà degli spazi riflessivi. Spazi uniformemente convessi. Teorema di Milman-Pettis.

9. Spazi di Hilbert (6 ore)

Spazi pre-hilbertiani. Disuguaglianza di Cauchy-Schwarz. Caratterizzazione delle norme pre-hilbertiane. Spazi di Hilbert. Teorema della proiezione. Rappresentazione di uno spazio di Hilbert come somma diretta di un suo sottospazio vettoriale chiuso e del complemento ortogonale di questo. Il teorema di Riesz sulla rappresentazione dei funzionali lineari e continui negli spazi di Hilbert. Insiemi ortonormali. Serie di Fourier negli spazi di Hilbert. Disuguaglianza di Bessel. Identità di Parseval. Teorema di Riesz-Fischer. Esistenza di basi ortonormali per gli spazi di Hilbert separabili.

Testi di riferimento:

- **H.Brezis** – *Analisi Funzionale. Teoria e applicazioni* – Liguori Editore
- **L.V.Kantorovich, G.P.Akilov** – *Analisi Funzionale* – Editori Riuniti
- Per la parte inerente alla Teoria della Misura il materiale didattico è disponibile sulla piattaforma Teams