



Università degli Studi di Messina  
Dottorato di Ricerca in Matematica e Scienze Computazionali  
**Analisi convessa**  
(Prof. Filippo D. Cammaroto)  
(30 ore)

### **1. Elementi di analisi convessa e teoremi di separazione**

Insiemi convessi. Insiemi radiali in un punto. Funzionale di Minkowski associato ad un insieme radiale nell'origine e sue proprietà. Spazi vettoriali topologici localmente convessi. Teorema di Hahn-Banach negli spazi vettoriali e suoi primi corollari. Iperpiani separatori. Coppie di insiemi separati in uno spazio vettoriale. Coppie di insiemi strettamente separati in uno spazio vettoriale. Teorema di separazione negli spazi vettoriali. Teorema di Hahn-Banach negli spazi vettoriali topologici localmente convessi e sue conseguenze. Teorema di separazione in uno spazio vettoriale topologico di due insiemi non vuoti e convessi dei quali uno almeno abbia interno non vuoto. Teorema di stretta separazione in uno spazio vettoriale topologico di due insiemi non vuoti e convessi e suoi corollari. Teorema di stretta separazione per insiemi assolutamente convessi.

### **2. Interno relativo e pseudo-relativo e quasi-relativo in spazi di Banach**

Interno relativo di un insieme in uno spazio vettoriale. Teorema di separazione in  $\mathbb{R}^n$  di due insiemi convessi aventi interni relativi disgiunti. Dualità di Fenchel e regola della somma in  $\mathbb{R}^n$ . Calcolo dell'interno relativo di un insieme convesso di  $\mathbb{R}^n$ . Interno pseudo-relativo di un insieme. Esempio di insieme avente interno pseudo relativo vuoto. Inclusioni tra i differenti tipi di interno di un insieme. Calcolo dell'interno relativo e pseudo relativo in uno spazio di Banach. Esempi. Coni convessi in spazi vettoriali. Ordinamento parziale indotto da un cono convesso. Interno quasi relativo di un sottoinsieme convesso di uno spazio vettoriale topologico. Proprietà dell'interno quasi relativo di un insieme. Relazioni tra i vari tipi di interni di un insieme. Esempio di insieme avente interno quasi relativo vuoto. Applicazione del teorema di separazione ad un teorema di dualità forte. Teorema di separazione di insiemi convessi coinvolgenti il loro interno quasi relativo. Sviluppi e prospettive della ricerca.

### **3. Funzioni convesse**

Funzioni convesse e loro proprietà fondamentali. Semicontinuità. Funzioni convesse semicontinue inferiormente. Funzioni convesse continue. Funzioni coniugate. Problemi di ottimizzazione.

### **4. Calcolo in spazi di Banach**

Funzionali Gâteaux-differenziabili definiti su spazi di Banach. Derivata di Gâteaux e proprietà fondamentali. Funzionali Fréchet-differenziabili definiti su spazi di Banach. Derivata di Fréchet e proprietà fondamentali. Confronto tra le due nozioni di differenziabilità. Regola della catena per funzionali differenziabili. Teorema della media per funzionali Fréchet differenziabili. Regola del prodotto per funzionali differenziabili. Derivate di Gâteaux e di Fréchet del secondo ordine. Condizioni necessarie di minimo e risultati di esistenza. L'operatore di superposizione.

### **5. Calcolo delle variazioni**

Funzionali del calcolo delle variazioni. Lemmi fondamentali del calcolo delle variazioni. Equazione di Eulero. Integrali primi. Condizione di Legendre. Il problema isoperimetrico. Geodetiche su una superficie.

## 6. Un complemento al principio variazionale di Ekeland e applicazioni

Un complemento al principio variazionale di Ekeland. Applicazioni al teorema di punto fisso di Caristi e ai funzionali Gâteaux-differenziabili. Teorema di tipo Liouville per funzioni armoniche su domini esterni. Criteri di costanza per funzioni definite su spazi di Banach e su domini esterni di  $\mathbb{R}^n$ . Ulteriori sviluppi e prospettive di ricerca.

## Bibliografia

- **H. Brezis**, *Functional Analysis, Sobolev Spaces and Partial Differential Equations*, Springer.
- **J.M. Borwein, R. Goebel**, *Notions of Relative Interior in Banach Spaces*, Journal of Mathematical Sciences, 115, (2003), 2542-2553
- **J.M. Borwein, A.S. Lewis**, *Partially finite convex programming, Part I: Quasi relative interiors and duality theory*, Mathematical Programming, 57, (1992), 15–48
- **J. Jahn**, *Introduction to the Theory of Nonlinear Optimization*, Springer, Berlin, 1994
- **F. Cammaroto, B. Di Bella**, *Separation Theorem Based on the Quasirelative Interior and Application to Duality Theory*, Journal of Optimization Theory and Applications, 125 (1), 223-229, 2005.
- **F. Cammaroto, B. Di Bella**, *On a separation theorem involving the quasi-relative interior*, Proceedings of the Edinburgh Mathematical Society, 50, 605-610, 2007.
- **F. Cammaroto, A. Chinnì**, *A Complement to Ekeland's Variational Principle in Banach Spaces*, Bulletin of the Polish Academy of Sciences. Mathematics, 44 (1), 29-33, 1996.
- **F. Cammaroto, A. Chinnì**, *A Liouville-type Theorem for Harmonic Functions on Exterior Domains*, Journal of Mathematical Analysis and Applications, 244 , 1-9, 2000.